

XV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

IV кръг, 12 юли 2012 г., х. Бузлуджа

Ученици старша възраст

1 задача. Провинциален характер. През 3012 г. Земната космическа империя владее Слънчевата система. Губернаторът на провинция Марс е обвинен от земния император в ретроградно политическо мислене. В отговор марсианецът заповядва с помощта на мощни ракетни двигатели орбитата на планетата му да бъде променена. В резултат на това по време на велико противостояние Марс вече не описва примка на фона на звездите за наблюдател от Земята, т.е. вече не извършва ретроградно движение.

- Ако след промяната голямата полуос на марсианската орбита си остава същата като сегашната, какъв трябва да бъде новият ѝ ексцентрицитет?

- Каква ще бъде видимата от Земята звездна величина на Марс във Велико противостояние? С кои светили на земното небе ще си съперничи планетата Марс тогава?

Понастоящем разстоянието от Земята до Марс при велико противостояние е 0.372 а.е., а видимата му звездна величина достига до -2.9^m .

Решение:

Въвеждаме следните означения:

r_E – радиус на земната орбита

a_M – голяма полуос на марсианската орбита

e – търсеният ексцентрицитет на орбитата на Марс

M_S – маса на Слънцето

G – гравитационна константа.

r_1 – разстояние от Земята до Марс, във Велико противостояние при сегашния ексцентрицитет на орбитата му.

r_2 – разстояние от Земята до Марс, във Велико противостояние, при описаната ситуация

А) За не се наблюдават примки е необходимо линейната скорост на Марс в момента на противостоянето V_M да е равна или по – голяма от земната скорост V_E . За земната скорост можем да запишем:

$$V_E = \sqrt{\frac{GM_S}{r_E}}$$

Понеже говорим за Велико противостояние, то Марс трябва да се намира в перихелия на своята орбита. Следователно, неговата скорост в този момент може да се изрази по следния начин:

$$V_M = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sqrt{\frac{GM_S}{a_M}}$$

Както казахме още в началото, за да няма примка, трябва да е изпълнено следното условие:

$$V_M \geq V_E$$

Оттук получаваме, че:

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sqrt{\frac{GM_S}{a_M}} \geq \sqrt{\frac{GM_S}{r_E}}$$

Следователно:

$$e \geq \frac{a_M - r_E}{a_M + r_E}$$

След пресмятане получаваме, че: $e \geq 0,207$.

При тази ситуация разстоянието от Марс до Слънцето в перихелий е:

$$r_{\Pi} = (1 - e)a_M$$

Разстоянието до Земята във Велико противостояние в този случай е:

$$r_2 = r_{\Pi} - r_E$$

Блясъкът на Марс, от гледна точка на земния наблюдател е обратнопропорционален на квадратите на разстоянията Марс – Слънце и Марс – Земя.

Следователно отношението на яркостта на Марс при новия ексцентрицитет (при който не се наблюдава примка) към яркостта му при настоящия е дава с израза:

$$n = \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{(r_1 + r_E)^2}{r_{\Pi}^2} \approx 5,5$$

Това означава, че при описаната ситуация Марс ще бъде 5,5 пъти по – ярък отколкото при сегашните Велики противостояния.

Звездната му величина ще се промени с

$$\Delta m = -2,5 \lg(n) \approx -1,7^m$$

Получаваме, че звездната величина на Марс при такова Велико противостояние би била:

$$m \approx -4,6^m.$$

Критерии за оценяване (общо 12т.):

А) – 8т.

- условие да няма примка – 3т.

- правилна математическа постановка – 3т.

- преобразувания и краен отговор – 2т.

Б) – 4т.

-фактори, влияещи на блясъка – 2т.

-преобразувания и отговор – 2т.

2 задача. Екзопланета. Младият астроном Димитър Борисов открива планета около далечна звезда. Звездата е същата като Слънцето. Според неговите наблюдения продължителността на пасажите на планетата по диска на звездата е 14.5 часа, а времето от началото на един пасаж до началото на следващия е равен на една земна година. Астрономът Борисов е определил, че планетата има маса 10 пъти по-голяма от масата на Юпитер и същата средна плътност, както плътността на звездата.

• Направете необходимите пресмятания и нарисуйте как би изглеждал пасажът на планетата по диска на звездата.

- Представете схематично кривата на блясъка на звездата по време на пасажа и определете амплитудата на изменение на звездната ѝ величина.

Решение:

А) Интервалът от време между два последователни пасажа на планетата пред диска на звездата е 1 година. Това всъщност е орбиталният период на планетата T и той е равен на орбиталният период на Земята около Слънцето. Понеже звездата е същата като Слънцето, то тя има и същата маса M_S . От тук можем да заключим, че би трябвало планетата да се намира на $r_E = 1 \text{ AU}$ от звездата и движи с линейна скорост, равна на орбиталната скорост на Земята V_E .

Тази скорост е:

$$V_E = \sqrt{\frac{GM_S}{r_E}}$$

Използвайки тази скорост можем да пресметнем колко би продължил един централен пасаж на планетата пред диска на звездата. За времето между I-ви и IV-ти контакт планетата се премества на разстояние равно на сумата на диаметрите на звезда и нейния собствен.

Означаваме радиуса на Слънцето с R_S . Следователно, ако плътността му е ρ_S , то:

$$M_S = \frac{4\pi R_S^3}{3} \rho_S$$

Оттук намираме, че:

$$\rho_S = \frac{3M_S}{4\pi R_S^3} \approx 1400 \text{ kg/m}^3$$

Според условието това е и плътността на планетата.

Означаваме масата на Юпитер с M_J . Съгласно задачата, планетата има маса $10M_J$.

Следователно, можем да запишем, че радиусът ѝ е:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M_J}{4\pi\rho_S}} \approx 150\,000 \text{ km}$$

От тук можем да намерим, че един централен пасаж би трябвало да продължи време:

$$t_0 = \frac{2(R_S + R)}{V_E} \approx 15,9 \text{ ч}$$

Забелязваме, че в действителност пасажът продължава по – малко, време $t = 14,5 \text{ ч}$.

Поради това можем да си направим извод, че пасажът не е централен, а планетата преминава през някаква хорда от звездата.

Дължината на тази хорда се отнася към дължината на диаметъра на звездата тъй както се отнасят t и t_0 .

За да направим схема на пасажа, то извършваме следната процедура:

-начертаваме окръжност с някакъв диаметър, която представлява диска на звездата;

-построяваме един неин диаметър

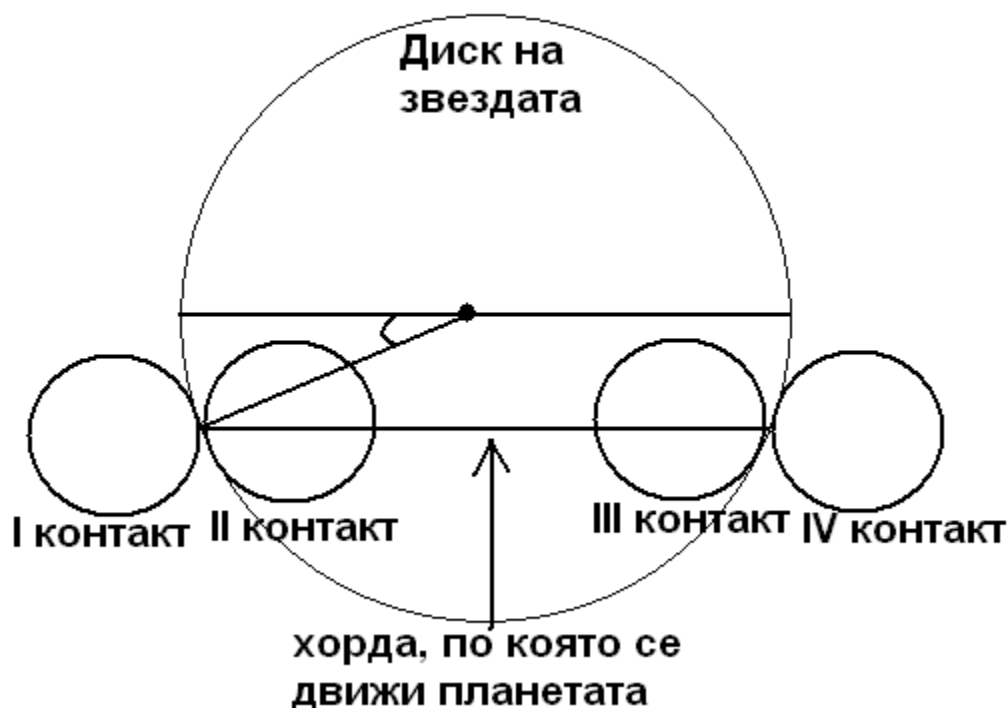
-от центъра на окръжността построяваме лъч, който сключва с построения вече диаметър ъгъл α , за който е изпълнено следното равенство:

$$\cos(\alpha) = \frac{t}{t_0}$$

Стойността на този ъгъл е $\alpha \approx 24^\circ$.

-от точката в която този лъч пресича окръжността, построяваме хора, която е успоредна на диаметъра. Тя всъщност представлява хордата по която се е движила планетата по време на пасажа

Схемата на пасажа изглежда приблизително така:



Б) Препреминаването на планетата пред диска на звездата се състои от три интервала от време:

T_{12} – между първи и втори контакт

T_{23} – между втори и трети контакт

T_{34} – между трети и четвърти контакт.

За интервалите T_{12} и T_{34} планетата се премества на едно и също разстояние, равно на нейния диаметър ($2R$). Следователно, продължителностите на тези интервали са равни по между си. Техните стойности са:

$$T_{12} = T_{34} = \frac{2R}{V_E} \approx 2,8\text{ч}$$

През първия от тези два отрязъка от време планетата навлиза пред диска на звездата.

Следователно, през него, блясъкът намалява. Между трети и четвърти контакт планетата напуска видимия диск на звездата и поради това яркостта нараства до обичайната си стойност.

Между втори и трети контакт, планетата се намира изцяло пред диска на звездата. Тогава блясъкът на звездата остава почти постоянен (с точност до потъмняването на диска и към

периферията). За да намерим промяната на звездната величина на звездата между тези два контакта трябва да пресметнем каква част от видимия диск на звездата се заема от тъмната половина на планетата. Можем да кажем, че ако E_0 е яркостта на звездата преди планетата да е навлязла пред диска ѝ, а E_1 е яркостта ѝ в интервала T_{23} , то:

$$E_0 \sim R_S^2$$

$$E_1 \sim R_S^2 - R^2$$

От тук следва, че:

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{R_S^2}{R_S^2 - R^2} \approx 1,05$$

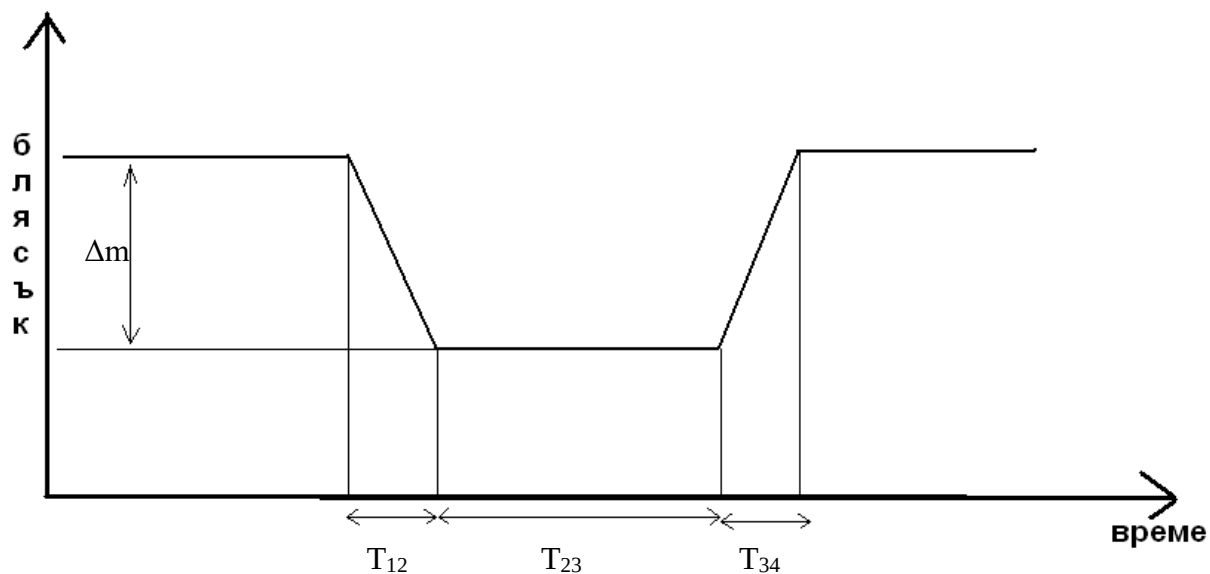
Съгласно закона на Погсон:

$$\Delta m = 2,5 \lg \left(\frac{E_0}{E_1} \right) \approx 0,05^m$$

Продължителността на интервала от време между втория и третия контакт е

$$T_{23} = t - 2T_{12} = 8,9\text{ч.}$$

Следователно, можем да заключим, че кривата на блясъка на звездата изглежда по следния начин:



Критерии за оценяване (общо 16т.):

A) – 10т.

- намиране на радиуса на планетата – 1т.
- намиране на продължителността на централен пасаж – 2т.
- идея за наличието на наклон на планетната орбита – 2т.
- отношение на хордата по която се движи планетата и диаметъра на звездата – 3т.
- правилна схема – 2т.

B) – 6т.

- продължителност на трите интервала от време – 2т.
- промяна на звездата величина – 2т.
- правилна крива на блясъка-2т.

3 задача. Забележителен удар. Космическият хандбалист Дилян Христов се намира в орбитална станция, движеща се по кръгова екваториална орбита с височина 400 км над земната повърхност. Станцията се движи в посоката на въртене на Земята. По радиото научава, че неговият приятел Калин Кръстев се е появил на Марс. При поредното излизане в открития космос хандбалистът Дилян мята с всичка сила средно голяма зелка в нужната посока. Каква трябва да е минималната начална скорост на зелката, така че тя да стигне до Марс?

Решение:

Както знаем, най – енергетично изгодната орбита, по която зелката може да достигне до Марс е елиптична орбита с перихелийно разстояние равно на разстоянието Земя – Слънце r_E и афелийно равно на разстоянието Марс – Слънце r_M .
Голямата полуос на тази орбита е

$$a = \frac{r_E + r_M}{2} = 1,26AU$$

а ексцентрицитетът

$$e = \frac{r_M - r_E}{r_M + r_E} \approx 0,21.$$

Нека да изстреляме тялото с начална скорост V_0 относно Земята, по посока на нейното орбитално движение (което допълнително улеснява задачата на Дилян). Ако с M_3 означим масата на Земята, а с R_3 нейния радиус, то в момента на изстрелване, в отправна система, свързана със Земята, зелката има пълна механична енергия:

$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{GM_3m}{R_3}$$

Нека да разгледаме точка от траекторията на зелката, в която тя се намира на разстояние $X \gg R_3$ от Земята и има скорост относно нашата планета V_1 . В това положение тялото практически няма да взаимодейства с планетата ни поради голямото разстояние до нея (с други думи ще се намира вън от сферата ѝ на гравитационно влияние и вече за него по – значимо ще бъде гравитационното въздействие на Слънцето). Следователно, можем да пренебрегнем гравитационната му потенциална енергия относно Земята и да запишем закона за запазване на енергията в следния вид:

$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{GM_3m}{R_3} = \frac{mV_1^2}{2} \quad (1).$$

Скоростта V_1 е относно Земята. Но тя се движи със скорост V_E спрямо Слънцето и зелката е хвърлена по посока на тази скорост. От тук следва, че скоростта на зелката спрямо Слънцето е равна на:

$$V = V_1 + V_E \quad (2).$$

Понеже, както вече казахме, зелката е много далеч от нашата планета, тя не взаимодейства гравитационно с нея. Това означава, че от тук нататък тя се движи само в гравитационното поле, създадено от Слънцето. Поради това, скоростта ѝ спрямо него, трябва да бъде така, че да се равнява на перихелийната скорост по елипсата, която зелката трябва да опише. Следователно:

$$V = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sqrt{\frac{GM_S}{a}} \approx 32,5 km/s$$

От уравнение (2) получаваме, че $V_1 \approx 2,8 km/s$.

Замествайки в уравнение (1), за началната скорост на зелката, относно Земята получаваме следния израз:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2GM_3}{R_3} + V_1^2} \approx 11,5 \text{ km/s}$$

Но зелката се хвърля от космическа станция, която се движи по кръгова орбита с височина над земната повърхност h . Нейната орбитална скорост е:

$$V' = \sqrt{\frac{GM_3}{R_3 + h}} \approx 7,6 \text{ km/s}$$

Дилян би могъл да хвърли зелката в момент в който тази скорост е насочена точно по посока на земната орбитална скорост. Тогава той ще трябва да ѝ придаде скорост, относно космическата станция (т.е. относно неговата собствена отправна система), която е равна на разликата на V_0 и V' .

Така началната скорост може да бъде сведена до минимум 3,9 km/s.

Максимален ефект може да се постигне по време на равноденствие, понеже в условието е казано, че космическата станция се движи по екваториална орбита и тогава тази орбита ще е точно в равнината на еклиптиката.

Критерии за оценяване (общо 16т.):

- най – енергетично изгодна орбита – 4т.
- правилно описание на ситуацията до напускане на земната сфера на влияние – 3т.
- преход в ОС, свързана със Слънцето – 2т.
- скорост, относно Слънцето в положението, когато зелката се намира на разстояние X от Земята – 3т.
- отчитане на орбиталната скорост на станцията – 2т.
- преобразувания и краен отговор – 2т.

4 задача. Северен полюс. Харон, най-големият спътник на Плутон, е открит през 1978 г. от американския астроном Джеймс Кристи. Скоро след това, в периода от 1985 до 1990 г. се наблюдава поредица от покрития на Харон от Плутон и на Плутон от Харон. Координатите на Плутон в началото на този период са $\alpha_1 = 14^{\text{h}}31^{\text{m}}$, $\delta_1 = +2^{\circ}39'$, а в края му $\alpha_2 = 15^{\text{h}}21^{\text{m}}$, $\delta_2 = -3^{\circ}04'$. Наблюденията на покритията са предоставили уникална възможност на астрономите да изследват системата Плутон – Харон. Наклонът на орбитата на Харон към еклиптиката е 112.8° .

- Определете приблизително координатите на небесните полюси за Плутон.

5 задача. Гибелта на Слънцето. След 5 милиарда години човешката цивилизация се е преселила на планета около друга, по-млада звезда, за да се спаси от загиващото Слънце. Но малка колония носталгично настроени земляни остава да живее на астероид в Слънчевата система. На астероида под прозрачен херметичен купол е построена обитаема база.

- Когато Слънцето стане червен гигант, на какво разстояние трябва да е астероидът, така че осветеността от Слънцето да е същата, както сега на Земята? А когато Слънцето стане бяло джудже? Направете приблизителна оценка, като си спомните какво знаете за еволюцията на звездите.

- Дали тогава през деня на астероида ще е по-тъмно или по светло, отколкото е сега през деня на Земята? Дайте качествени отговори за случая на червен гигант и на бяло джудже и ги обяснете.

- Дали наистина хората ще могат да живеят на астероида в тези два случая? Какви фактори ще са от значение за оцеляването им?

Решение:

А) В таблицата са дадени астрофизическите характеристики на Слънцето в трите етапа от неговата еволюция: днешното Слънцето, етапа на червен гигант и бяло джудже. В третата колонка са дадени светимостите му във всеки един от трите етапа, в единици светимост на Слънцето сега.

	Температура	Радиус	Светимост [L_S]
Днес	6 000K	700 000 km	1
Червен гигант	3 000K	1,52 AU	6750
Бяло джудже	10 000K	6 000 km	$5,6 \cdot 10^{-4}$

Следователно, за да получава астероидът същото количество енергия от Слънцето, каквото днес, в първия случай, той трябва да се отмести приблизително на 82 AU. Във втория случай това разстояние се оказва равно на 0,023 AU.

Б) И в двата случая през деня ще бъде по-тъмно, защото червените гиганти и белите джуджета излъчват по – голямата част от своето лъчение, съответно в инфрачервения и ултравиолетовия диапазон. Поради това, макар и достигащата осветеност до Земята да е същата като сега, то светлината, която хората ще могат да виждат с очите си ще бъде значително по – малко. Поради това, през деня ще бъде по – тъмно. Освен това, ако хората са си създали и изкуствена атмосфера, която има свойствата сегашната атмосфера на Земята, то голяма част от тези лъчения изобщо няма да достигат повърхността на астероида.

В) И в двата случая Слънцето ще бъде източник на вредни инфрачервени или ултравиолетови лъчи.

Червените гиганти за източник на силен звезден вятър. Това ще създава мощен поток от заредени частици в околността на звездата, които ще създават чудовищна радиационна обстановка на повърхността на астероида, който не притежава естествената защита на Земята – плътна атмосфера и магнитно поле. Приливни сили в близост до бялото джудже. Ако плътността на бялото джудже е много голяма, възможно е астероидът да бъде разрушен. Това ще се случи ако плътността на бялото джудже надхвърли 106 г/см^3 .

На тази орбита падащите върху астероида космически тела (метеорити) ще имат много голяма скорост 180 – 250 км/с. При това няма да я има защитата на обширната земна атмосфера.

И в двата случая хората могат да оцелеят, но под повърхността на астероида.

Критерии за оценяване (общо 12т.):

A) – 6т.

-разумни астрофизически характеристики на белите джуджета и червените гиганти – 4т.

-намиране на разстоянията – 2т.

B) – 3т.

-съобразяване на спектралното разпределение на енергията излъчвана от бяло джудже или червен гигант – 2т.

-верен отговор – 1т.

B) – 3т.

Справочни данни:

Голяма полуос на орбитата на Марс 1.524 а.е.

Маса на Юпитер 2×10^{27} кг

Маса на Слънцето 2×10^{30} кг

Радиус на Слънцето 700 000 км

Гравитационна константа $\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 / \text{кг.с}^2$

Радиус на Земята 6370 км

Маса на Земята 6×10^{24} кг

Разстояние то Земата до Слънцето 150×10^6 км